



Antecedentes: Distancia entre dos puntos.

Tinoco, G. (2013). *Antecedentes: Distancia entre dos puntos*. [Manuscrito no publicado]. México: UAEM.



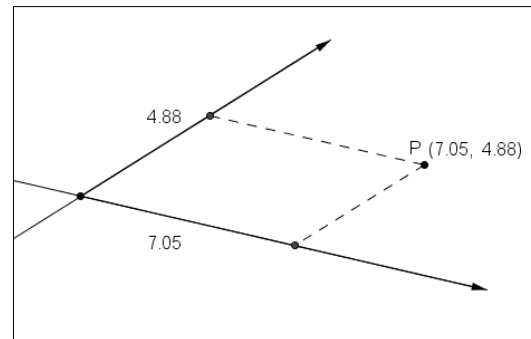
Antecedentes

Coordenadas cartesianas

Los sistemas de coordenadas tienen una gran importancia. Un ejemplo muy actual son los sistemas GPS o Sistemas de Posicionamiento Global, los cuales por medio de satélites permiten localizar cualquier objeto sobre la superficie terrestre. En el siglo XVII Descartes y Fermat, trabajando independientemente, vislumbraron las potencialidades del álgebra para la representación y el estudio de las curvas. Básicamente, lo hecho por ellos consistió en idear un esquema sencillo para representar la posición de cualquier punto del plano por medio de coordenadas, esto es, números que representan distancias a partir de dos ejes. Los sistemas de coordenadas pueden ser de tres dimensiones (espaciales) pero en este curso nos limitaremos a sistemas de dos dimensiones (en el plano).

Sistema de ejes coordenados

Dado un par de rectas numéricas que se cortan, se puede asociar a cada punto del plano un par ordenado de números reales, los cuales permiten localizar tal punto. Se les llama par ordenado, porque el orden en que se anotan es siempre el mismo, el primer número del par se refiere a la coordenada respecto a una de las rectas y el segundo a la otra. Para determinar las coordenadas se trazan rectas paralelas a las rectas y se miden las distancias desde el punto de intersección de las rectas.



Plano cartesiano

El ángulo que forman las dos rectas puede ser cualquiera, pero, por facilidad se prefiere utilizar un ángulo recto. Cuando las rectas consideradas son perpendiculares entre sí, una horizontal y la otra vertical, al par de números se les llama **coordenadas cartesianas** del punto y a las rectas se les llama **ejes**; al eje horizontal: eje x y, al eje vertical: eje y . Al punto de intersección de los ejes se denomina **origen** y se denomina con la letra O . A un sistema de coordenadas definido de esta manera se le conoce también como **plano cartesiano**. Convencionalmente se da sentido a los ejes de la siguiente manera: para el eje x , a partir del origen los números que se ubiquen a la derecha se consideran positivos, los que se sitúan a la izquierda negativos. En el eje y , los números que están arriba del origen serán positivos y abajo, negativos. La forma de anotar el lugar que ocupa



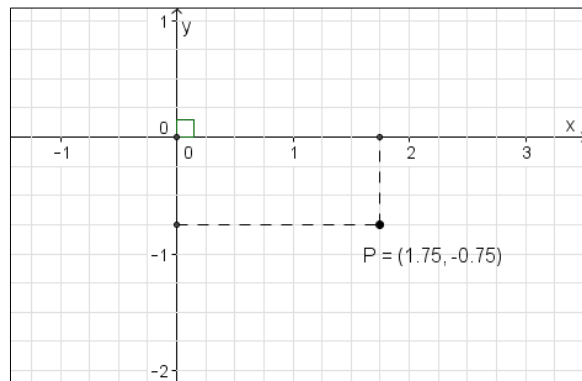
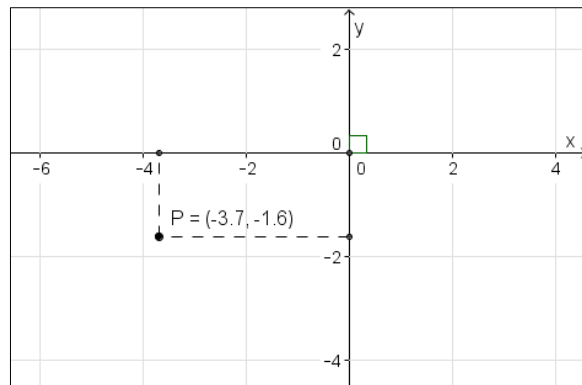
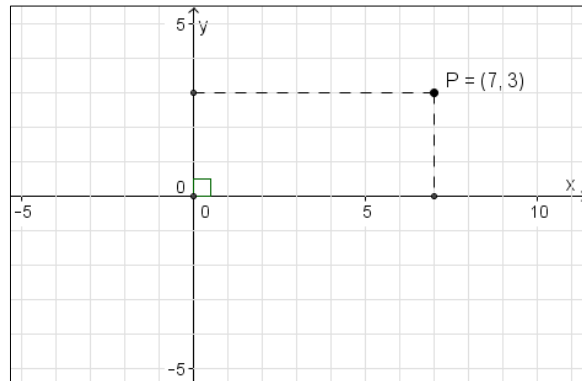
un punto en el plano cartesiano es mediante dos coordenadas, separadas por una coma y encerradas entre paréntesis. Los ejes dividen al plano cartesiano en cuatro cuadrantes, los cuales se nombran: primero, segundo, tercero y cuarto cuadrante respectivamente, iniciando con el cuadrante superior derecho y en sentido contrario a las manecillas del reloj.

En general, a un punto (x, y) del plano cartesiano se le llama pareja ordenada, porque se trata de dos números –representados con variables– que tienen un orden. Este orden es importante, ya que sitúa de manera inequívoca cada punto; así, por ejemplo, el punto $(2, -2)$ es distinto del punto $(-2, 2)$.

A las coordenadas cartesianas también se les conoce como **coordenadas rectangulares**, a las coordenadas sobre el eje x , se les llama **abscisas**; y a las coordenadas sobre el eje y , **ordenadas**.

Al dibujar un plano cartesiano el origen puede ubicarse en cualquier parte del espacio disponible. Además, la graduación de los ejes puede determinarse a una distancia arbitraria, pero fija. El primer número asignado a una marca en un eje lo determina la persona que elabora la gráfica. Una vez asignado ese número, la longitud del origen a la marca correspondiente determina el número de unidades asociadas a esa longitud. Esta asignación numérica que define la unidad de medida se llama **escala** del eje.

Por ejemplo, en la figura anterior, la escala indicada por los números que aparecen en las marcas sobre los ejes, señala que en esa gráfica la separación entre las líneas de la cuadrícula representa una unidad. En cambio en la figura siguiente, la separación entre las líneas representa 2 unidades. Observa también que el origen no necesariamente debe estar ubicado al centro de la gráfica. En estas figuras se muestra la marca de ángulo en el origen de las coordenadas, para enfatizar que los ejes son perpendiculares entre sí y, por lo tanto,





se trata de un plano cartesiano. Esta marca de ángulo se omite cuando se da por hecho que el sistema de representación es cartesiano.

También es posible representar gráficamente puntos con coordenadas fraccionarias. Por ejemplo, en la siguiente figura la separación entre las líneas de la cuadrícula representa $1/4$ (0.25) de unidad. Por lo tanto, las coordenadas del punto **P** son: $\left(\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}\right)$, o bien con fracciones decimales: $(1.75, -0.75)$.

En la primera figura de esta página el punto **P** se encuentra en el primer cuadrante, en la segunda figura el punto **P** se halla en el tercer cuadrante y en la última figura en el cuarto cuadrante.

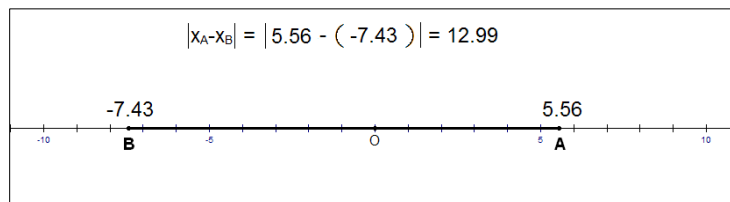
Nota: La tarea de determinar las coordenadas de un punto o de representar gráficamente un punto dadas sus coordenadas, se puede practicar en las aplicaciones "Coordenadas cartesianas (1) al (4)" del capítulo "Antecedentes" disponibles en la dirección:
<http://www.geogebraTube.org/student/c6961/m67380/ylyy>

Distancia entre dos puntos

Para calcular la distancia entre dos puntos de una recta numérica, se toma el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas. Por ejemplo, en la figura se ilustra el cálculo de la distancia entre los puntos **A** y **B**.

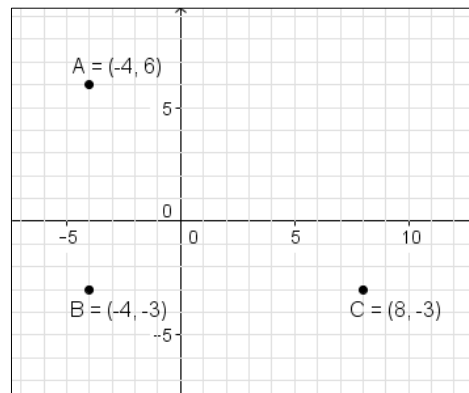
La distancia **AB** es igual a la diferencia entre **5.56** y **-7.43**. En este ejemplo se trata de la diferencia entre un número positivo y otro negativo,

teniendo presente la definición de resta como la suma del inverso aditivo del sustraendo y la regla de los signos de la suma algebraica, el resultado es: **12.99**. Lo cual se corrobora con la representación gráfica.



Esto es aplicable al cálculo de la distancia entre dos puntos, en el caso de que dichos puntos se encuentre sobre una recta horizontal o vertical en el plano cartesiano. Por ejemplo:

En la figura se muestra que los puntos **A** y **B** se encuentran sobre una recta vertical, lo cual se puede verificar en el hecho de que comparten la misma abscisa (-4). La distancia entre estos dos





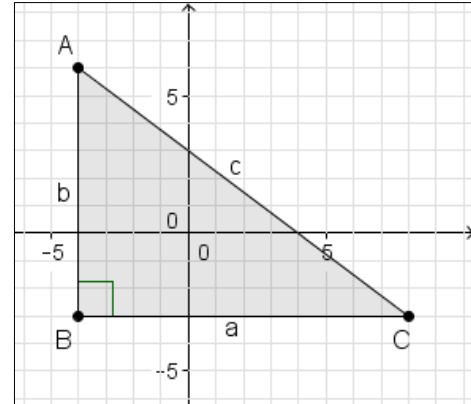
puntos es igual a la diferencia entre sus ordenadas.

$$\overline{AB} = |6 - (-3)| = |6 + 3| = 9$$

Por su parte, los puntos **B** y **C** se encuentran sobre una recta horizontal, comparten la misma ordenada (-3). La distancia entre estos dos puntos es igual a la diferencia entre sus abscisas.

$$\overline{BC} = |(-4) - 8| = |-12| = 12$$

En cambio, los puntos **A** y **C** se encuentran sobre una recta oblicua respecto a los ejes, esto hace que no se pueda calcular, con el procedimiento anterior, la distancia entre ellos. Para encontrar esta distancia será necesario aplicar el teorema de Pitágoras. El cual establece que: en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Esto es: $c^2 = a^2 + b^2$



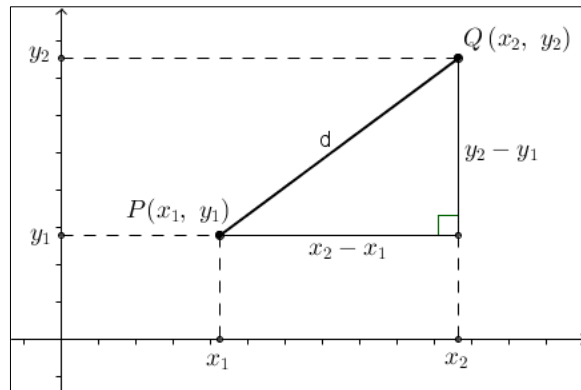
En el caso de la distancia **AC**, se puede calcular así:

$$\overline{AC} = c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

Generalizado lo anterior, se puede considerar que calcular la distancia entre dos puntos, equivale a determinar la longitud del segmento de recta cuyos extremos son dichos puntos.

Si se representa el segmento en un plano cartesiano; y luego, en cada uno de sus extremos, se trazan rectas paralelas a los ejes cartesianos se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento del cual se desea medir su longitud.

En la figura, se muestra un triángulo rectángulo de hipotenusa **d** y catetos de longitud $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, al aplicar el teorema de Pitágoras se obtiene la fórmula siguiente:



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Esta fórmula representa la longitud de un segmento de recta determinado por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . O dicho de otra manera, representa la distancia entre dichos puntos.

La siguiente figura muestra un ejemplo.

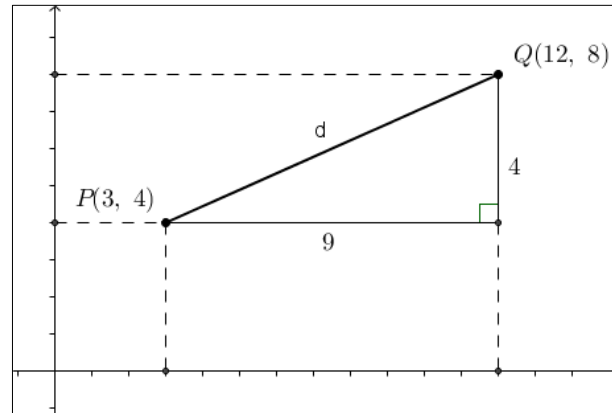
Aplicando la fórmula se puede calcular la distancia entre los puntos P y Q de la siguiente manera:

$$d = \sqrt{(12 - 3)^2 + (8 - 4)^2}$$

$$d = \sqrt{9^2 + 4^2}$$

$$d = \sqrt{81 + 16}$$

$$d = \sqrt{97} \approx 9.85$$



La fórmula para calcular la distancia entre dos puntos es independiente del cuadrante donde se encuentren los puntos. Esto se debe a que las diferencias $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$ se elevan al cuadrado, por lo tanto, el resultado siempre será un número no negativo (positivo o cero). La raíz cuadrada es positiva, esto significa que la distancia d es siempre un número no negativo.

Observa también que, para calcular la distancia, al sustituir las coordenadas de los puntos no importa cuál de ellos se elija para ser (x_1, y_1) o (x_2, y_2) , el resultado no cambia. Esto se debe a que la única alteración posible sería que cambie el signo de las diferencias $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, pero como cada una de ellas está elevada al cuadrado, finalmente siempre son positivas o cero, por lo tanto, no cambia el resultado.

Nota: La tarea de determinar la distancia entre dos puntos, se puede practicar en la aplicación "Distancia entre dos puntos" del capítulo "Antecedentes" disponible en la dirección:
<http://www.geogebraTube.org/student/c6961/m67380/ylyy>